Tentamen Calculus II, 2011

Datum : 07-04-2011
Tijd : 9.00 - 12.00

U dient al uw antwoorden duidelijk te motiveren.
Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Echter, antwoorden die uitsluitend m.b.v. de (grafische) rekenmachine verkregen zijn worden niet goed gerekend.
De detailnormering van het tentamen staat onderaan. Succes !

1. Beschouw de rij $\{a_n\}$ die recursief wordt gedefinieerd door

   $$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

   (a) Toon met volledige inductie aan dat

   $$a_n < 5, \quad n = 1, 2, \cdots$$

   (b) Toon aan dat de rij $\{a_n\}$ stijgend is.

   (c) Bewijs op basis van onderdelen (a) en (b) dat de rij $\{a_n\}$ convergeert.

   (d) Bepaal de limiet $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. (a) Laat zien dat de Maclaurinreeks van de functie

   $$\ln(e + x^2)$$

   gegeven wordt door de machtreeks

   $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{ne^n}$$

   (b) Bepaal de convergentiestraal van deze Maclaurinreeks.

   (c) Bepaal voor welke waarden van x de Maclaurinreeks absoluut convergent is.

   (d) Bepaal voor welke waarden van x de Maclaurinreeks voorwaardelijk ('conditionally') convergent is.

3. Beschouw de functie $f(x, y)$ gedefinieerd door

   $$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

   aanvullen
   2

   (a) Is deze functie f continu in alle punten (x, y) ? Waarom wel; waarom niet ?

   (b) Toon aan dat de functie $g(x, y)$ gedefinieerd door

   $$g(x, y) = f(x, y) \sin y$$

   continu is in $(x, y) = (0, 0)$. (Aanwijzing: gebruik de ongelijkheid $2xy \leq x^2 + y^2$.)

evt checke

4. Bepaal de integraal

   $$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, dx dy$$

   door omdraaien van de integratievolgorde.

1

5. Beschouw de transformatie van (u, v), met $u > 0, v > 0$, naar (x, y), gedefinieerd door

$$x = \frac{u}{v}, \quad y = uv$$

   (a) Bepaal de Jacobiaan van deze transformatie.

   (b) Gebruik deze transformatie om de volgende integraal te berekenen:

$$\iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dxdy,$$

   waarbij D het gebied in het eerste kwadrant is dat wordt ingesloten door de krommen $xy = 1$ en $xy = 9$, en de lijnen $y = x$ en $y = 4x$.

6. (a) Bepaal alle oplossingen van de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$y''(x) + 4y(x) = \sin x$$

   (b) Ga voor de differentiaalvergelijking onder (a) na of er een oplossing is voor het randvoorwaardeprobleem

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$$

   (c) Bepaal alle oplossingen van

$$y''(x) + 4y(x) = \sin 2x$$

   (d) Bepaal alle oplossingen van

$$y''(x) + 4y(x) = \sin x + \sin 2x$$

7. Ga na of de volgende beweringen juist of onjuist zijn. In het geval u denkt dat de bewering juist is geef dan een bewijs, en anders geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Als $\sum a_n$ convergeert dan divergeert $\sum \frac{1}{a_n}$ naar ∞.

   (b) Als $\sum a_n$ en $\sum b_n$ divergeren, dan divergeert $\sum (a_n + b_n)$.

   (c) Als $a_n > 0$ en $\sum a_n$ convergeert dan convergeert $\sum a_n^3$.

Puntenverdeling (totaal 100). Gratis 10.

1. a: 3, b: 4, c: 3. d: 5.
2. a: 6, b: 4, c: 4, d: 2.
3. a: 6, b: 5.
4. 8
5. a: 5, b: 10.
6. a: 5, b: 2, c: 5, d: 3.
7. a: 3, b: 3, c: 4

2